

UN PRODUIT SANS FIN ?

COLLIGNON Thomas 2nd, COLLIGNON Martin 2nd
LETARD Gwendoline 2nd, RAOUL Hugo 2nd

Lycée Blaise Pascal, Orsay (91)

Années 2015/2016

Sommaire

1	Présentation du sujet	1
2	Existence de finalité ?	2
3	Tous les chiffres possèdent-ils un antécédent ?	2
4	Partant de la finalité peut-on trouver les nombres de départ ?	2
4.1	Pour 1 et 3	2
4.2	Pour 6	3
5	Techniques pour réduire les possibilités au premier coup d'œil	4
6	Programmes	4
6.1	Finalité (nombres à 2 chiffres).	4
6.2	Finalité (nombres à 3 chiffres)	5
6.3	De la finalité aux antécédents.	5

1 Présentation du sujet

On choisit un nombre compris entre 10 et 99. On multiplie les deux chiffres qui le composent. Si on obtient encore un nombre, on recommence cette opération jusqu'à obtenir un seul chiffre.

Exemple avec 77 :

$$77 \rightarrow 49 \rightarrow 36 \rightarrow 18 \rightarrow 8$$

On constate que 77 mène à 8, on dira [1] que :

→ 77 est un **antécédent** de 8

→ 8 est la **finalité** de 77, de 49, de 36 et de 18

Résultats :

- ★ Tous les nombres ont une finalité.
- ★ Tous les chiffres ont un antécédent.

- ★ Partant de la finalité on peut trouver les antécédents.
- ★ Techniques pour réduire les possibilités au premier coup d'oeil.

2 Existence de finalité ?

Soit a le chiffre des dizaines et b le chiffre des unités, un nombre "ab" peut s'écrire sous la forme $10a + b$. [2]

On va démontrer que pour tout nombre "ab", on a $10a + b > a * b$, ainsi on aura montré qu'à chaque étape il y a une diminution, donc qu'il existe une finalité.

$$10a + b > a * b \iff 10a + b - a * b > 0$$

$$\iff a(10 - b) + b > 0$$

Comme $b < 10$ alors $10 - b > 0$

De plus $a > 0$ et $9 \geq b \geq 0$

→ Tous les nombres "ab" ont donc une finalité.

3 Tous les chiffres possèdent-ils un antécédent ?

Pour obtenir un antécédent d'un chiffre, il suffit d'associer un "1" à ce chiffre (devant ou derrière).

Exemple : 2 admet comme antécédent 12 mais aussi 21.

Par contre, même si tous les chiffres possèdent un antécédent, certains en possèdent plus que d'autres.

Exemples : [3]

finalités	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
nombre d'antécédents	24	1	8	2	5	6	13	2	22	3

4 Partant de la finalité peut-on trouver les nombres de départ ?

Soit a le chiffre des dizaines, et b le chiffre des unités. Pour représenter un nombre "ab" , il faut multiplier a par 10 pour avoir le nombre des dizaines. On obtient alors : $10a + b$ pour représenter un nombre à deux chiffres. [4]

4.1 Pour 1 et 3

Pour 1 : $a * b = 1$.

On a $a = 1$ et $b = 1$

Il y a donc seulement 11.

Pour 3 : $a * b = 3$.

Comme 3 est un nombre premier, on a seulement $3 = 3 * 1$.

Il y a donc soit 31 soit 13.

4.2 Pour 6

Soit $a; b; c; d; e$ et f des chiffres :

Pour obtenir 6 en une étape :

$a * b = 6 \Leftrightarrow b = 6/a$	$\rightarrow a = 1$
	$\rightarrow a = 6$
	$\rightarrow a = 3$
	$\rightarrow a = 2$

On obtient alors :

Si $a = 1$ $a * b = 6$ $1b = 6$ $b = 6$	Si $a = 2$ $a * b = 6$ $2b = 6$ $b = 3$	Si $a = 3$ $a * b = 6$ $3b = 6$ $b = 2$	Si $a = 6$ $a * b = 6$ $6b = 6$ $b = 1$
--	--	--	--

Pour avoir la finalité 6 en une étape, il faut donc prendre 16 ; 61 ; 23 ; ou 32.

Pour obtenir 6 en deux étapes :

Avec 16 :	Avec 32 :
$c * d = 16$	$c * d = 32$
$d = 16/c$	$d = 32/c$
$16 = 8 * 2$ ou	$32 = 4 * 8$
$16 = 4 * 4$	Si $c = 4; d = 8$
Si $c = 8; d = 2$	Si $c = 8; d = 4$
Si $c = 2; d = 8$	
Si $c = 4; d = 4$	

On ne peut pas obtenir 61 et 23 en multipliant deux chiffres.

Pour obtenir la finalité 6 en 2 étapes, il faut donc prendre 82 ; 28 ; 44 ; 84 ; 48.

Pour obtenir 6 en trois étapes :

Avec 28 :	Avec 48 :
$e * f = 28$	$e * f = 48$
$f = 28/e$	$f = 48/e$
$28 = 7 * 4$	$48 = 6 * 8$
Si $e = 7; f = 4$	Si $e = 6; f = 8$
Si $e = 4; f = 7$	Si $e = 8; f = 6$

On ne peut pas obtenir 44 et 82 en multipliant deux chiffres.

Pour obtenir la finalité 6 en 3 étapes, il faut donc prendre 74 ; 47 ; 68 ; 86.

5 Techniques pour réduire les possibilités au premier coup d'œil

Propriétés : [5]

- ★ Si un nombre a a au moins un chiffre pair alors sa finalité est paire.
- ★ Si une finalité est impaire alors le nombre de départ a deux chiffres impairs.

Preuve :

- ★ Soient a et b deux chiffres composant un même nombre dont l'un au moins est pair. Le produit de a par b est pair, un nouveau nombre pair est obtenu, son chiffre des unités est donc pair. Ainsi à chaque étape un nombre pair est obtenu, la finalité sera donc paire.
- ★ On a montré qu'un nombre contenant au moins un chiffre pair a une finalité paire. Donc par contraposée, si une finalité est impaire, alors les deux chiffres composant ses antécédents sont impairs.

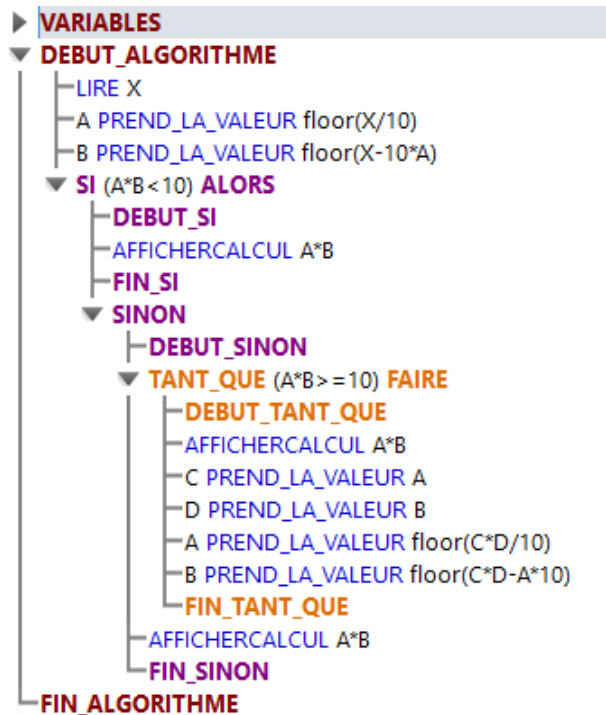
Remarque :

La réciproque de la deuxième propriété est fausse.

Contre-exemple : 37 est un antécédent de 2.

6 Programmes

6.1 Finalité (nombres à 2 chiffres).



[6]

Le programme ci-dessus demande à l'utilisateur de saisir un nombre de deux chiffres. Puis il associe à A le chiffre des dizaines ($X/10$) et à B le chiffre des unités ($X-10*A$). Ensuite, si le produit de A et B (le résultat de ce produit correspond au nombre de l'étape suivante) est inférieur ou égal à 10, il affiche le résultat. Sinon, il fait le calcul de l'étape suivante jusqu'à ce que le produit de A et B soit inférieur à 10 (Tant_que ($A*B \geq 10$) faire).

6.2 Finalité (nombres à 3 chiffres)

Nous avons aussi fait un programme qui permet de calculer la finalité des nombres à 3 chiffres ("de forme ABC"). Nous avons choisi la méthode de calcul $A * B * C$. Le programme fonctionne de la même manière que le premier programme. [7]

6.3 De la finalité aux antécédents.

Nous avons aussi réussi à faire un programme permettant de trouver les antécédents de la finalité donnée par l'utilisateur. [8]

Notes d'édition :

- [1] Il serait souhaitable de donner des définitions précises de "antécédent" et "finalité".
- [2] Notations : dans cet article, les auteurs notent ab le nombre $10a + b$ (ce qu'on note souvent \overline{ab}), et ils notent $a * b$ le produit des chiffres a et b (qu'on note classiquement ab).
- [3] On peut imaginer que ce tableau a été construit en utilisant l'algorithme de la partie 6 ; cela aurait mérité d'être signalé.
- [4] C'est ce qui a déjà été expliqué au début de la partie 2.
- [5] Le relecteur a apprécié la rédaction de cette section, et en particulier la présence de la remarque.
- [6] Le programme présenté prend un nombre compris entre 10 et 99, et retourne sa finalité ; cela aurait mérité d'être dit.
- [7] On aurait souhaité voir le code correspondant à cet algorithme, et la preuve justifiant que la boucle TANT QUE de l'algorithme s'achève à un moment.
- [8] Là aussi, on aurait souhaité voir le code correspondant à l'algorithme.